MODEL SEDERHANA SUPERSIMETRI

NURHADI
Fisika, Fakultas Ilmu Eksakta, Universitas Nahdlatul Ulama Blitar,
Jalan Masjid No. 20, Kota Blitar, Jawa Timur
nurhadi@unublitar.ac.id

ABSTRAK

Partikel yang ada di alam ini dibedakan menjadi dua yaitu boson an fermion. Dari kedua partikel tersebut memiliki sifat-sifat yang sangat bertolak belakang , sehinggga keduanya sulit disatukan.Usaha penyatuan medan boson dan medan fermion kedalam satu multiplet yang sama dapat dilakukan dengan pengenalan transformasi baru yaitu transformasi supersimetri (SUSY).Generator transformasi supersimetri ini bersama generator transformasi Poincare membangun aljabar yang tertingkatkan yang dikenal sebagai aljabar Lie tertingkatkan (GLA) atau aljabar SUSY.Di dalam penelitian ini, aljabar supersimetri dibangun dengan pendekatan fisis yaitu mengenalkan suatu parameter spinorial yang berdimensi kanonik (-1/2).Pengalian parameter ini terhadap medan boson menghasilkan medan yang bersifat fermionik dan sebaliknya.

Kata kunci : supersimetri, boson , fermion

PENDAHULUAN

Prinsip simetri dapat ditentukan bentuk lagrangian interaksi yang berlaku , memberikan klasifikasi terhadap semua partikel yang teramati dan kaidah–kaidah seleksi proses interaksi. Simetri fundamental yang telah mapan baik secara teori maupun eksperimen adalah simetri dari grup Poincare yaitu translasi dan rotasi dalam ruang Minkowski. Selain itu ada juga yang disebut simetri internal yaitu simetri grup flavour SU (2) dan grup colour SU (3) yang juga telah diterima baik dalam fisika.Selama beberapa waktu telah dilakukan usaha untuk memadukan simetri ruang – waktu dari grup Poincare dengan grup internal. [1][2]

Penyatuan antara grup ruang waktu dengan grup internal baru berhasil direalisasikan oleh J. Wess dan B. Zumino (1974) dengan memasukkan hubungan antikomutasi dari generator transformasi supersimetri kedalam struktur aljabar yang bersangkutan. Penggabungan dua grup ini membentuk struktur aljabar baru yang disebut Aljabar Lie Tertingkatkan (Graded Lie Algebra) atau lazim disebut aljabar supersimetri. Pada tahun yang sama , A. Salam dan J. Strathdee (1974) berhasil membangun representasi medan bagi aljabar supersimetri yaitu konsep supermedan (superfield) dalam superruang (superspace). Supersimetri merupakan teori yang menjanjikan karena teori ini diharapkan memberikan jawaban atas berbagai persoalan yang ada dalam fisika partikel antara lain : penggabungan konstanta kopling dalam teori kemanunggalan agung atau Grand Unified Theory (GUT) dan masalah hierarki (hierarchy problem) dalam teori kemanunggalan agung (GUT).

MODEL MAINAN

Dimensi Kanonik

Dimensi kanonik merupakan hal yang harus diperhatikan dan merupakan salah satu syarat yang harus dipenuhi bila transformasi medan dilakukan. Untuk mengetahui dimensi kanonik suatu besaran kita mengacu pada Lagrangian dan aksi pada suatu sistem.Keterkaitan suatu aksi S dan

Lagrangian sistem didefinisikan menurut hubungan [8][9]

$$S=\int L dt \qquad (1)$$

dimana L adalah Lagrangian sistem yang didefinisikan

$$L=T-V \qquad (2)$$

dengan T adalah energi kinetik dan V adalah energi potensial sistem. Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$S=\int \mathcal{L} d^4x \qquad (3)$$

dengan $\mathcal{L}$ adalah rapat Lagrangian persatuan volume

$$L=\int \mathcal{L} d^3x \qquad (4)$$

Sebelum membangun model seringkali dilakukan analisis dimensi awal yakni analisis dimensi kanonik sebagai berikut. Nilai dimensi kanonik didefinisikan sebagai bilangan pangkat massa.Misalkan dimensi kuantitas A adalah x , ini berarti

$$[A]=\left[m^x\right]=x \qquad (5)$$

Di dalam teori medan kuantum biasa digunakan satuan natural $\hbar=c=1$,karenanya

$$[\hbar]=[c]=\left[m^0\right]=0 \qquad (6)$$

Dari konstanta $\hbar$ dan pers. (1) serta mengingat Lagrangian sebagai selisih antara energi kinetik dan energi potensial , didapatkan

$$[S]=[E][t]=[\hbar]=0 \qquad (7)$$

Dari hubungan relativistik massa energi $E^2=p^2c^2+m^2c^4$ didapatkan

$$\left[E^2\right]=\left[p^2\right]\left[c^2\right]=\left[m^2\right]\left[c^4\right]=\left[m^2\right] \qquad (8)$$

Dari analisis dimensi di atas didapatkan

$$[t]=[x]=\left[m^{-1}\right] \qquad (9)$$

atau

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]=[\nabla]=\left[\partial_\mu\right]=[m] \qquad (10)$$

Dengan demikian , dari aksi didapatkan

$$[\mathcal{L}]=\left[m^4\right]=4 \qquad (11)$$

Untuk mendapatkan dimensi kanonik dari medan boson ϕ dan medan fermion ψ , perhatikan Lagrangian bebas dari persamaan Klein – Gordon dan persamaan Dirac berikut ini

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{KG}&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-m^2\phi^2\right)\\ \mathcal{L}_D&=\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi\end{aligned} \qquad (12)$$

Untuk medan boson ϕ , didapatkan dimensi kanoniknya

$$\begin{aligned}\left[m^2\right]\left[\phi^2\right]&=[\mathcal{L}]\\ \left[m^2\right]\left[\phi^2\right]&=\left[m^4\right]\\ \left[\phi^2\right]&=\left[m^2\right]\\ [\phi]&=[m]\\ [\phi]&=1\end{aligned} \qquad (13)$$

Jadi dimensi kanonik untuk boson adalah 1. Sedangkan untuk medan fermion ψ , didapatkan dimensi kanoniknya

$$\begin{aligned}[\bar{\psi}][m][\psi]&=[\mathcal{L}]\\ [\bar{\psi}][m][\psi]&=\left[m^4\right]\\ [\bar{\psi}][\psi]&=\left[m^3\right]\\ [\bar{\psi}]&=[\psi]\\ [\psi]&=\left[m^{3/2}\right]\\ [\psi]&=3/2\end{aligned} \qquad (14)$$

Jadi dimensi kanonik untuk boson adalah $3/2$.

Transformasi Supersimetri

Simetri yang dibahas dalam medan kuantum adalah simetri dari Lagrangian. Karena itu kita mempersoalkan simetri yang mengaitkan antara boson dan fermion maka

Lagrangian harus mengandung kedua medan tersebut , $L = L(¤, ·)$.Model yang paling sederhana adalah medan tak bermassa dan bebas dengan Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{«}¤\right)^{2} - \frac{1}{2}\bar{·}¥^{«}\partial_{«}· \qquad (15)$$

yang mana ¨ adalah medan skalar real, · adalah medan spinor sekawan diri (self – conjugate).Dengan

$$\begin{aligned} \bar{·} &= ·^{\dagger}¥^{0} \\ ·^{C} &= C\bar{·}^{T} \end{aligned} \qquad (16a)$$

dalam representasi Majorana untuk matri $¥^{«}$

$$·^{C} = ·^{*} \qquad (16b)$$

Syarat Majorana menyatakan

$$·^{*} = · \qquad (16c)$$

maka

$$·^{*} = · \qquad (16d)$$

sehingga

$$\bar{·} = ·^{T}¥^{0} \qquad (16e)$$

Dari pembahasan dimensi kanonik diketahui bahwa dimensi kanonik ¨ adalah 1, sedangkandimensi kanonik · adalah $3/2$ .Transformasi atau perubahan kecil kedua medan tersebut secara umum mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} · &\rightarrow ·' = · + ¢· \\ ¤ &\rightarrow ¤' = ¤ + ¢¤ \end{aligned} \qquad (3.120)$$

Karena transformasi simetri yang kita harapkan adalah transformasi yang mengaitkan kedua medan tersebut maka

$$\begin{aligned} ¢¤ &\propto · \\ ¢· &\propto ¤ \end{aligned} \qquad (3.121)$$

Pers. (3.116) dan pers.(3.117) mengisyaratkan perlu adanya suatu konstanta dengan dimensi kanonik $1/2$ atau $-1/2$ yang menghubungkan kedua medan tersebut. Selain persamaan Dirac diketahui bahwa · adalah matriks kolom 4×1 sedangkan dari persamaan Klein – Gordan merupakan skalar biasa. Dari pertimbangan – pertimbangan diatas untuk transformasi boson kita ambil bentuk

$$¢¤ \rightarrow \bar{ò}· \qquad (3.122)$$

yang mana parameter $ò = ò_{\sim}$, dengan $\sim = 1, 2, 3, 4$ yang merupakan spinor kecil (infinitesimal) berdimensi kanonik $-1/2$ dan antikomut antara sesame serta dengan · ,

$$\begin{aligned} \{ò_{\sim}, ò\} &= 0 \\ \{ò_{\sim}, ·\} &= 0 \\ \{·_{\sim}, ·\} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.123)$$

Sedangkan transformasi bagi fermion

$$¢· = ¤(x)ò \qquad (3.124)$$

Jelas kedua suku mempunyai dimensi yang berbeda , $3/2$ untuk suku ruas kiri dan $1/2$ untuk suku ruas kanan.Untuk menyamakan dimensi , ruas kanan kita tambah dengan operator $\partial_{«}$ yang berdimensi satu

$$¢· \rightarrow \partial_{«}¤ò \qquad (3.125)$$

Namun penambahan ini menyebabkan ruas kanan bersifat vektor , untuk membuatnya membuatnya menjadi skalar dapat ditambahkan matriks gamma $¥^{«}$, sehingga

$$¢· = ¥^{«}\partial_{«}¤ò \qquad (3.126)$$

Tampak bahwa tidak ada keberatan terhadap transformasi dan kita anggap transformasi yang kita inginkan telah didapatkan .Kita anggap pula pencarian transformasi pengaitan boson dan fermion “ *selesai* “.

Terhadap transformasi , Lagrangian bertransormasi sebagai

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(-\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \phi \psi \right) \qquad (3.127)$$

=

Meskipun tidak nol tetapi muncul dalam bentuk derivatif total dan menggunakan teorema Gauss

integral aksi sama dengan nol

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}\, d^4 x = 0 \qquad (3.128)$$

Artinya, aksi invarian terhadap transformasi supersimetri dan tidak merubah persamaan gerak.

MODEL DIPERLUAS

Model Plus

Model yang kita buat dengan cara coba coba didepan baik Lagrangian maupun transformasi SUSY , telah menuju pada hasil yang kita harapkan. Lagrangian menuju derivatif total yang mengakibatkan transformasi aksi sama nol atau secara fisika persamaan gerak tidak berubah. Mempertimbangkan kemungkinan adanya interaksi maka model Lagrangian yang kita buah harus dapat menampung interaksi skalar dan fermion yang dapat berbentuk $\bar{\psi}\psi\phi$ dan $\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi$

yang diperkenankan oleh simetri Lorentz.Untuk itu model Lagrangian kita perluas dengan

menampung medan skalar dan pseudoskalar.Misalkan, medan boson ϕ diganti dengan medan

skalar A dan medan pseudoskalar B dengan dimensi kanonik

A = skalar $[A] = [M]$

B = pseudoskalar $[B] = [M]$

maka Lagrangian yang menampung medan skalar A dan medan pseudoskalar B adalah

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \qquad (3.129)$$

dan didefinisikan transformasi SUSY

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\psi$$
$$\delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma^5\psi$$
$$\delta\psi = \gamma^\mu \partial_\mu \left(A + i\gamma^5 B\right)\varepsilon \qquad (3.130)$$
$$\delta\bar{\psi} = -\bar{\varepsilon}\gamma^\mu \partial_\mu \left(A - i\gamma^5 B\right)$$

terhadap transformasi ini , Lagrangian bertransformasi menuju derivatif tota

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(-\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \left(A - i\gamma^5 B\right)\psi \right) \qquad (3.131)$$

Karena itu, persamaan gerak tidak berubah.

Komutator Transformasi Supersimetri (SUSY)

Mengingat bahwa Lagrangian juga mempunyai simetri ruang waktu,maka transformasi koordinat dalam ruang Minkowski terdiri dari transformasi Lorentz dan transformasi Lorentz tak homogen

atau transformasi Poincare yang diberikan oleh :

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu$$

Ini berarti simetri lagrangian adalah simetri terhadap transformasi :

1. Lorentz dengan generator $M_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + i\left(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu\right)$ dan parameter $\omega_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$
2. Translasi dengan generator $P_\mu = -i\partial_\mu$ dan parameter a_μ .
3. SUSY dengan generator spinor Q_α dan parameter spinor ε_α yang merupakan bilangan

Grassman

Transformasi – transformasi tersebut diberikan oleh :

$$\delta_P A = -ia_\mu \partial_\mu A$$

$$\delta_M \psi = \left\{\sigma_{\mu\nu} + i\left(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu\right)\right\}\psi$$

$$\delta_Q A = \bar{\varepsilon}\psi$$

$$\delta_Q B = i\bar{\varepsilon}\gamma^5 \psi$$

$$\delta_Q \psi = \gamma^\mu \partial_\mu \left(A + i\gamma^5 B\right)\varepsilon$$

$$(3.132)$$

Dengan demikian komutator dari dua transformasi infenitesimal SUSY akan menghasilkan bentuk – bentuk transformasi diatas yaitu salah satu atau gabungannya, hal ini berarti

$$\left[\bar{\varepsilon}_1 Q, \bar{\varepsilon}_2 Q\right] = \left[\delta_1, \delta_2\right]$$

$$= Salah\ satu\ atau\ gabungan$$

$$bentuk - bentuk\ \ pers.(3.132)$$

Untuk mendapatkan aljabar supersimetri kita selidiki komutator dari dua transformasi berturut – turut δ_1, δ_2, $\left[\delta_1, \delta_2\right]$.

Sebagai contoh ,

$$\left[\delta_1, \delta_2\right] A = \delta_1\left(\delta_2 A\right) - \delta_2\left(\delta_1 A\right) \qquad (3.133)$$

Suku pertama ruas kanan (3.133) menggunakan transformasi

$$\begin{aligned}\delta_1\left(\delta_2 A\right) &= \delta_1\left(\bar{\varepsilon}_2 \psi\right)\\ &= \bar{\varepsilon}_2\left(\delta_1 \psi\right)\\ &= \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \left(A + i\gamma^5 B\right)\varepsilon_1\\ &= \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \partial_\mu A \varepsilon_1 + i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu B \varepsilon_1\end{aligned} \qquad (3.134)$$

Suku kedua ruas kanan

$$\begin{aligned}\delta_2\left(\delta_1 A\right) &= \delta_2\left(\bar{\varepsilon}_1 \psi\right)\\ &= \delta_2\left(\bar{\psi}\varepsilon_1\right)\\ &= \left(\delta_2 \bar{\psi}\right)\varepsilon_1\\ &= -\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \partial_\mu A \varepsilon_1 + i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu B \varepsilon_1\end{aligned} \qquad (3.135)$$

Pada baris kedua telah digunakan telah digunakan pembalikan Majorana $\bar{\varepsilon}\psi = \bar{\psi}\varepsilon$ .Substitusi pers. (3.134) dan pers. (3.135) ke pers. (3.133) ,diperoleh

$$\begin{aligned}\left[\delta_1, \delta_2\right] A &= \delta_1\left(\delta_2 A\right) - \delta_2\left(\delta_1 A\right)\\ &= 2\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \partial_\mu A\end{aligned}$$

$$(3.136)$$

Sedangkan perhitungan komutator medan – medan yang lain ,lengkapnya sebagai berikut :

$$\left[\delta_1, \delta_2\right] A = 2\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \partial_\mu A$$

$$\left[\delta_1, \delta_2\right] B = 2\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \partial_\mu B$$

$$\left[\delta_1, \delta_2\right] \psi = 2\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \partial_\mu \psi + \bar{\varepsilon}_1 \gamma_\nu \varepsilon_2 \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$(3.137)$$

Hasil akhir perhitungan merupakan bentuk translasi empat dimensional dengan parameter $a_\mu = 2\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \partial_\mu$. Selain itu suku kedua pada transformasi supersimetri bagi medan fermion merupakan suku ekstra yang bukan merupakan generator transformasi ruang –waktu tepatnya bukan generator translasi maupun Lorentz.Karena itu , suku ini dikenal sebagai“*suku on – shell”* yang perlu dilenyapkan agar aljabar yang nantinya dibangun merupakan aljabar tertutup.[10]

Mengingat transformasi

$$\delta_1\left(\delta_2 \psi\right) = \delta_1\left(\gamma^\mu \partial_\mu \left(A + i\gamma^5 B\right)\varepsilon_2\right)$$

maka transformasi bagi ψ perlu diberi tambahan ,sehingga menjadi

$$\delta \psi = \gamma^\mu \partial_\mu \left(A + i\gamma^5 B\right)\varepsilon + \left(\delta \psi\right)_{eks} \quad (3.138)$$

Suku *on – shell* dapat dikompensasi dengan menambahkan medan bantu F dan G yang mana

$$\left[F\right] = \left[G\right] = \left[M^2\right] \qquad (3.139)$$

dan

$$\delta F = \bar{\varepsilon}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$\delta G = i\bar{\varepsilon}\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi \qquad (3.140)$$

dengan transformasi medan ekstra

$$\delta_{eks} \psi = \left(F + i\gamma^5 G\right)\varepsilon \qquad (3.141)$$

Sehingga didapatkan transformasi SUSY dengan medan bantu adalah sebagai beriku

$$\left[\delta_2,\delta_1\right]\begin{bmatrix}A\\B\\\psi\\F\\G\end{bmatrix}=2\bar{\varepsilon}_1\gamma^{\mu}\varepsilon_2\partial_{\mu}\begin{bmatrix}A\\B\\\psi\\F\\G\end{bmatrix}\qquad(3.142)$$

atau

$$\left[\delta_2,\delta_1\right]=2\bar{\varepsilon}_1\gamma^{\mu}\varepsilon_2\partial_{\mu}\qquad(3.143)$$

Dengan penambahan medan bantu tadi sekarang aljabarnya menjadi aljabar tertutup.

Model Wess – Zumino

Dengan perluasan yang kita lakukan dengan menambahkan medan skalar A dan medan pseudoskalar B membuat SUSY memanggil suku transformasi ekstra yang akhirnya dipenuhi oleh medan bantu F dan G.Hal ini berarti jumlah komponen boson menjadi empat. Jadi dengan demikian SUSY harus diperlakukan sedemikian halus sehingga jumlah komponen medan boson dan medan fermion simetris atau sama.Model lagrangian yang menampung spinor ψ dan empat medan skalar A, B , F dan G diajukan oleh J. Wess dan B. Zumino .Lagrangian tersebut adalah :

$$L=-\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}A\right)^2-\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\right)^2-\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi+\frac{1}{2}F^2+\frac{1}{2}G^2\qquad(3.144)$$

Lagrangian ini dikenal sebagai ***"model Wess – Zumino".***[11]

Transformasi SUSY – nya diberikan oleh :

$$\begin{aligned}\delta A&=\bar{\varepsilon}\psi\\ \delta B&=i\bar{\varepsilon}\gamma^5\psi\\ \delta\psi&=\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\left(A+i\gamma^5B\right)\varepsilon+\left(F+i\gamma^5G\right)\varepsilon\\ \delta F&=\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\\ \delta G&=i\bar{\varepsilon}\gamma^5\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\end{aligned}\qquad(3.145)$$

Terhadap transformasi di atas Lagrangian tidak invarian tetapi menuju ke derivatif total dan dengan menggunkan teorema Noether serta hukum integral aksi Gauss didapatkan bahwa integral aksi S invarian.Transformasi Lagrangian diungkapkan dalam bentuk :

$$\delta L=\partial_{\mu}\left\{-\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_{\mu}\left[\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\left(A+i\gamma^5B\right)-\left(F-i\gamma^5G\right)\right]\psi\right\}\qquad(3.146)$$

dan

$$\delta S=\int\delta L\,d^4x=0\qquad(3.147)$$

Seperti disebutkan di depan, transformasi Lagrangian menuju derivatif total ini tidak menyebabkan perubahan persamaan gerak.

HASIL PENELITIAN

Aljabar Supersimetri

Di awal telah ditunjukkan bahwa transformasi SUSY membangkitkan sebuah struktur aljabar tertutup yang serupa aljabar Lie [12]. Selanjutkan

$$\left[\delta_2,\delta_1\right]=\left[\bar{\varepsilon}_2Q,\bar{\varepsilon}_1Q\right]=2\bar{\varepsilon}_1\gamma^{\mu}\varepsilon_2\partial_{\mu}\qquad(4.16)$$

bila

$$\partial_{\mu}=iP_{\mu}\qquad(4.17)$$

maka uraian komponen ruas kiri memberikan

$$
\begin{aligned}
\left[\bar{\text{õ}}_2 Q,\bar{\text{q}}_1 Q\right] &= \left[\bar{\text{õ}}_2\ Q\ ,\bar{\text{q}}_{1\sim} Q_\sim\ \right] \\
&= \bar{\text{õ}}_2\ Q\ \bar{\text{q}}_{1\sim} Q_\sim - \bar{\text{q}}_{1\sim} Q_\sim \bar{\text{õ}}_2\ Q \\
&= (-1)^2\ \bar{\text{q}}_{1\sim} \bar{\text{õ}}_2\ Q\ Q_\sim - \bar{\text{q}}_{1\sim} Q_\sim \bar{\text{õ}}_2\ Q \\
&= \bar{\text{q}}_{1\sim} \bar{\text{õ}}_2\ Q\ Q_\sim - \bar{\text{q}}_{1\sim} Q_\sim \bar{\text{õ}}_2\ Q \\
&= \bar{\text{q}}_{1\sim} \bar{Q}\ \text{ò}_2\ Q_\sim - \bar{\text{q}}_{1\sim} Q_\sim \bar{Q}\ \text{ò}_2 \\
&= -\bar{\text{q}}_{1\sim} \text{ò}_2\ \bar{Q}\ Q_\sim - (-1)^2\ \bar{\text{q}}_{1\sim} \text{ò}_2\ Q_\sim \bar{Q} \\
&= -\bar{\text{q}}_{1\sim} \text{ò}_2\ \bar{Q}\ Q_\sim - \bar{\text{q}}_{1\sim} \text{ò}_2\ Q_\sim \bar{Q} \\
&= -\bar{\text{q}}_{1\sim} \text{ò}_2\ \left\{\bar{Q}\ Q_\sim + Q_\sim \bar{Q}\ \right\} \\
&= -\bar{\text{q}}_{1\sim} \text{ò}_2\ \left\{\bar{Q}\ , Q_\sim\right\}
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

Dalam langkah – langkah evaluasi diatas selain digunakan sifat antikomut antar ò serta antara ò dan Q juga diterapkan sifat pembalikkan Majorana .Sehingga didapatkan hubungan

$$
\begin{aligned}
-\bar{\text{q}}_{1\sim} \bar{\text{õ}}_2\ \left\{\bar{Q}\ , Q_\sim\right\} &= 2i\bar{\text{q}}_1 \text{¥}^{\text{«}} \text{ò}_2 P_{\text{«}} \\
&= 2i\bar{\text{q}}_{1\sim} \left(\text{¥}^{\text{«}}\right)_{\sim}\ \text{ò}_2\ P_{\text{«}} \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{Q_\sim , \bar{Q}\ \right\} = -2i\left(\text{¥}^{\text{«}}\right)_{\sim}\ P_{\text{«}}
$$

Sedangkan hubungan antar generator susy Q

$$
\begin{aligned}
\left[\text{¢}_Q,\text{¢}_Q\right]A &= \text{¢}_Q\left(\text{¢}_Q A\right) - \text{¢}_Q\left(\text{¢}_Q A\right) \\
&= \text{¢}_Q\left(\bar{\text{õ}}\cdot\ \right) - \text{¢}_Q\left(\bar{\text{õ}}\cdot\ \right) \\
&= \bar{\text{õ}}\left(\text{¢}_Q\cdot\ \right) - \bar{\text{õ}}\left(\text{¢}_Q\cdot\ \right) \\
&= \bar{\text{õ}}\left(\text{¥}^{\text{«}}\partial_{\text{«}}\left(A + i\text{¥}^5 B\right)\text{ò} + \left(F + i\text{¥}^5 G\right)\text{ò}\right) \\
&\quad -\bar{\text{õ}}\left(\text{¥}^{\text{«}}\partial_{\text{«}}\left(A + i\text{¥}_5 B\right)\text{ò} + \left(F + i\text{¥}_5 G\right)\text{ò}\right) \\
&= \bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\partial_{\text{«}} A\text{ò} + i\bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\partial_{\text{«}}\text{¥}^5 B\text{ò} + \bar{\text{õ}}F\text{ò} + i\bar{\text{õ}}\text{¥}^5 G\text{ò} \\
&\quad -\bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\partial_{\text{«}} A\text{ò} - i\bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\partial_{\text{«}}\text{¥}^5 B\text{ò} - \bar{\text{õ}}F\text{ò} - i\bar{\text{õ}}\text{¥}^5 G\text{ò} \\
&= \bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\text{ò}\partial_{\text{«}} A + i\bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\text{¥}^5\text{ò}\partial_{\text{«}} B + \bar{\text{õ}}\text{ò}F + i\bar{\text{õ}}\text{¥}^5\text{ò}G \\
&\quad -\bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\text{ò}\partial_{\text{«}} A - i\bar{\text{õ}}\text{¥}^{\text{«}}\text{¥}^5\text{ò}\partial_{\text{«}} B - \bar{\text{õ}}\text{ò}F - i\bar{\text{õ}}\text{¥}^5\text{ò}G \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad (4.20)
$$

dalam ungkapan generator

$$
\begin{aligned}
\left[\text{¢}_Q,\text{¢}_Q\right] &= \left[\bar{\text{õ}}_\sim Q_\sim , \bar{\text{õ}}\_Q\ \right] \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim Q_\sim \bar{\text{õ}}\_Q\ - \bar{\text{õ}}\_Q\ \bar{\text{õ}}_\sim Q_\sim \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim \bar{\text{õ}}\_Q_\sim Q\ + \bar{\text{õ}}_\sim \bar{\text{õ}}\_Q\ Q_\sim \qquad (4.21) \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim \bar{\text{õ}}\_\left(Q_\sim Q\ + Q\ Q_\sim\right) \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim \bar{\text{õ}}\_\left\{Q_\sim , Q\ \right\}
\end{aligned}
$$

maka

$$
\left[\text{¢}_Q,\text{¢}_Q\right]A = 0
$$

$$
\bar{\text{õ}}_\sim \bar{\text{õ}}\ \left\{Q_\sim , Q\ \right\} = 0
$$

atau

$$
\left\{Q_\sim , Q\ \right\} = 0 \qquad (4.22)
$$

Selain itu hubungan komutator Q dan $P_{\text{«}}$

$$
\begin{aligned}
\left[\text{¢}_Q,\text{¢}_P\right]A &= \text{¢}_Q\left(\text{¢}_P A\right) - \text{¢}_P\left(\text{¢}_Q A\right) \\
&= \text{¢}_Q\left(-ia_{\text{«}}\partial_{\text{«}} A\right) - \text{¢}_P\left(\bar{\text{õ}}\cdot\ \right) \\
&= -ia_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\left(\text{¢}_Q A\right) - \bar{\text{õ}}\left(\text{¢}_P\cdot\ \right) \\
&= -ia_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\left(\bar{\text{õ}}\cdot\ \right) - \bar{\text{õ}}\left(-ia_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\cdot\ \right) \\
&= -ia_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\left(\bar{\text{õ}}\cdot\ \right) + i\bar{\text{õ}}a_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\cdot \\
&= -i\bar{\text{õ}}a_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\cdot\ + i\bar{\text{õ}}a_{\text{«}}\partial_{\text{«}}\cdot \\
&= 0
\end{aligned}
\qquad (4.23)
$$

dalam uraian generator

$$
\begin{aligned}
\left[\text{¢}_Q,\text{¢}_P\right] &= \left[\bar{\text{õ}}_\sim Q_\sim , a_{\text{«}} P_{\text{«}}\right] \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim Q_\sim a_{\text{«}} P_{\text{«}} - a_{\text{«}} P_{\text{«}} \bar{\text{õ}}_\sim Q_\sim \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim a_{\text{«}} Q_\sim P_{\text{«}} - \bar{\text{õ}}_\sim a_{\text{«}} P_{\text{«}} Q_\sim \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim a_{\text{«}}\left(Q_\sim P_{\text{«}} - P_{\text{«}} Q_\sim\right) \\
&= \bar{\text{õ}}_\sim a_{\text{«}}\left[Q_\sim , P_{\text{«}}\right]
\end{aligned}
$$

maka

$$
\left[\text{¢}_Q,\text{¢}_P\right]A = 0
$$

$$
\bar{\text{õ}}_\sim a_{\text{«}}\left[Q_\sim , P_{\text{«}}\right]A = 0 \qquad (4.24)
$$

$$
\left[Q_\sim , P_{\text{«}}\right] = 0
$$

Dengan kehadiran transformasi simetri baru ini berarti secara keseluruhan kini mempunyai simetri ruang – waktu dan supersimetri. Transformasi Lagrangian terhadap transformasi simetri ruang – waktu diberikan oleh transformasi Lorentz dengan generator $M_{«¬}$ dan translasi dengan generator $P_«$, dengan

$$P_« = -i\partial_«$$

$$M_{«¬} = ±_{«¬} + i\left(x_¬\partial_« - x_«\partial_¬\right) \qquad (4.25)$$

dimana

$$±_{«¬} = \frac{\left[¥^«, ¥^¬\right]}{4i} \qquad (4.26)$$

Suatu medan spinorial $·(x)$ bertransformasi Lorentz menurut hubungan [13]

$$·'(x') = S(\Lambda)·(x) \equiv U^\dagger(\Lambda)·(x)U(\Lambda)$$

(4.27)

dengan

$$S(\Lambda) = \exp\left\{-\frac{i}{2}μ_{«¬}±_{«¬}\right\} \qquad (4.28)$$

$$U(\Lambda) = \exp\left\{-\frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}\right\}$$

Generator – generator ini membangun aljabar Lie bagi transformasi lorentz tak homogen atau di sebut juga transformasi Poincare ,

$$\left[P_«, P_¬\right] = 0$$

$$\left[M_{«¬}, P_~\right] = i\left(¢_{«¬}P_¬ - ¢_{¬~}P_«\right)$$

$$\left[M_{«¬}, M_~\right] = i\left(¢_« M_{~¬} + ¢_{¬~}M_~ + ¢_{«~}M_¬ + ¢_¬ M_{«~}\right)$$

(4.29)

Aljabar diatas disebut *aljabar Poincare*.

Sebagaimana medan spinor yang bertransformasi Lorentz menurut pers. (3.15) ,generator $Q_~$ bertransformasi kecil

$$\begin{aligned} Q'_~ &= S(\Lambda)Q \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{2}μ_{«¬}±_{«¬}\right\}Q \\ &= \left(1 - \frac{i}{2}μ_{«¬}±_{«¬}\right)Q \\ &= Q_~ - \frac{i}{2}μ_{«¬}±_{«¬}Q \end{aligned} \qquad (4.30)$$

sedangkan

$$\begin{aligned} Q'_~ &= U^\dagger(\Lambda)Q_~U(\Lambda) \\ &= \exp\left\{\frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}\right\}Q_~ \exp\left\{-\frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}\right\} \\ &= \left(1 + \frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}\right)Q_~\left(1 - \frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}\right) \\ &= \left(Q_~ + \frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}Q_~\right)\left(1 - \frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}\right) \\ &= Q_~ + \frac{i}{2}μ_{«¬}M_{«¬}Q_~ - \frac{i}{2}μ_{«¬}Q_~M_{«¬} \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(μ_{«¬}M_{«¬}\right)^2 Q_~ \\ &= Q_~ + \frac{i}{2}μ_{«¬}\left(M_{«¬}Q_~ - Q_~M_{«¬}\right) + O\left(μ^2\right) \\ &= Q_~ + \frac{i}{2}μ_{«¬}\left[M_{«¬}, Q_~\right] \end{aligned}$$

(4.31)

sehingga

$$Q_~ - \frac{i}{2}\left(μ_{«¬}±_{«¬}\right)_~ Q = Q_~ + \frac{i}{2}μ_{«¬}\left[M_{«¬}, Q_~\right]$$

$$\left[Q_~, M_{«¬}\right] = \left(±_{«¬}\right)_~ Q$$

(4.32)

Aljabar Poincare bersama generator spinorial $Q_~$ yang berperan sebagai representasi peningkat membentuk aljabar Lie tertingkatkan yaitu *aljabar susy* :

$$\begin{aligned}
&\left[Q_{\sim}, P_{«}\right] = 0 \\
&\left[Q_{\sim}, M_{«¬}\right] = \left(\pm_{«¬}\right)_{\sim} \; Q \\
&\left\{Q_{\sim}, Q \;\right\} = 0 \\
&\left\{Q_{\sim}, \overline{Q} \;\right\} = -2i\left(¥^{«}\right)_{\sim} \; P_{«}
\end{aligned} \qquad (4.33)$$

Komutator pers. (4.29) dan pers. (4.33) merupakan aljabar Lie bagi transformasi Lorentz tak homogen atau transformasi Poincare dan disebut aljabar Poincare L_0. Aljabar Poincare L_0 ini

i) L_0 = aljabar Poincare

ditingkatkan oleh generator spinorial $Q_{\sim}$ yang berperan sebagai representasi peningkat

ii) $Q_{\sim} \in L_1$

dan menurut persamaan

$$\begin{aligned}
&L_0 \circ L_1 \to L_1 \\
&L_1 \circ L_1 \to L_0
\end{aligned} \qquad (4.34)$$

Syarat ini telah dipenuhi oleh komutator pers. (4.33).Demikian pula syarat supersimetrisasi pers. (4.10), sehingga

$$\begin{aligned}
L_0 \circ L_1 &= -(-1)^{0.1} L_1 \circ L_0 \\
&= -L_1 \circ L_0
\end{aligned} \qquad (4.35)$$

yang dipenuhi jika hubungan adalah komutasi sebagaimana diberikan oleh komutator pers. (4.33) Sedangkan hubungan

$$\begin{aligned}
Q_{\sim} \circ \overline{Q} \; &= -(-1)^{1.1} \overline{Q} \; \circ Q_{\sim} \\
&= \overline{Q} \; \circ Q_{\sim}
\end{aligned} \qquad (4.36)$$

hanya dipenuhi jika produk $(\circ)$ adalah antikomutasi sebagaimana telah diperolah seperti diungkapkan pada pers. (4.33) juga.Dengan demikian aljabar diatas membangun satu struktur aljabar tertingkatkan yaitu aljabar Poincare dengan representasi peningkat adalah generator $Q_{\sim}$ .Aljabar ini disebut aljabar Poincare tertingkatkan atau aljabar supersimetri (SUSY).

KESIMPULAN

Dalam melakukan transformasi yang mengaitkan antara medan boson dan medan fermion dipenuhi dengan menghadirkan parameter spinorial. Pengalian parameter ini terhadap medan boson memberikan kuantitas atau medan baru yang bersifat fermionik dan sebaliknya. Perbedaan dimensi kanonik antara medan boson dan medan fermion membawa pada pemilihan dimensi bagi parameter spinorial diatas adalah (−1/2) bukan (+1/2). Pertimbangan terhadap adanya interaksi didalam Lagrangian dibuat secara coba-coba, memotivasinya untuk memperluas dengan menambah medan pseudoskalar.

Perhitungan komutasi dari transformasi SUSY dan generator transformasi Poincare serta tuntutan terhadap ketertutupan, komutatornya memaksa kehadiran medan bantu. Kehadiran medan bantu ini membuat jumlah komponen boson sama dengan jumlah komponen fermion yaitu empat. Perhitungan lebih lanjut terhadap generator spinorial dengan generator translasi dan generatorLorentz memberikan aljabar tertingkatkan dan keseluruhan aljabar disebut aljabar supersimetri (SUSY).

DAFTAR PUSTAKA

[1] D. Hooper , Nature’s Blueprint : Supersymmetry on The Search for A Unified Theory of Force and Matter , Harper-Collins e-books , New york , 2008

[2] G.Kane , M.Shifman, The Supersymmetric World : The Beginning of the Theory , World Scientific, Singapore ,2000

[3] J.B. Marion, S.T.Thornton,Classical Dynamics of Particle and Systems

4ed,Saunders College Publishing,Philadelphia USA, 1995
[4] P. Sari Wijayani , Model Standar Bagi Interaksi Elektrolemah SU(2)×U(1) ,Laporan Tugas Akhir Jurusan Fisika FMIPA ITS, Surabaya , 2005
[5] M. Ali Safa'at , Simpangan CP dalam Peluruhan Kaon Netral , Laporan Tugas Akhir , Jurusan Fisika FMIPA ITS, Surabaya , 2006
[6] A.Salam, J.Strathdee, Nucl Phys **B76**, (1974) ; Phys.Rev. **D11** (1975)
[7] A. Purwanto , Fisika Statistik , Gava Media , Yogyakarta , 2007
[8] L.H Ryder , Quantum Field Theory 2ed, Cambridge University Press, London, 1996
[9] A Purwanto , Jurnal FOTON , **Vol.9,No.2** (2005)
[10] M.F. Sohnius , Phys.Rep**. 128** (1983)
[11] J. Wess, B. Zumino, Nucl.Phys, **B70**, (1974) ;Phys.Lett. **B49** , (1974)
[12] H.J.W Muller - Kirsten ,A. Wiedemann ,SUPERSYMMETRY : An Introduction with Conceptual and Calculational Details, World Scientific, Singapore , 1987
[13] D. Bailin , A. Love , Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory , IOP Publishing, London , 1994